Clase 10: Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange

C.J. Vanegas

27 de abril de 2008

1. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange

Estamos interesados en maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas restricciones o condiciones adicionales.
(Método de multiplicadores de Lagrange, nos da una condición necesaria para que exista un extremo condicionado)

Teorema 1. *Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1, $\overline{x}_0 \in U$ $g(\overline{x}_0) = x$ y $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : g(\overline{x}_0) = c\}$ Notese que $\overline{x}_0 \in S$. Suponga que $\bigtriangledown g(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$ si $f\ |_S$ alcanza un máximo o un mínimo local en $\overline{x}_0$ entonces existe un número real tal que: $\boxed{\bigtriangledown f(\overline{x}_0) = \lambda \bigtriangledown g(\overline{x}_0)}$. (A $\overline{x}_0$ lo llamaremos punto crítico de $f\ |_S$)*

Demostración : Similarmente al caso $n = 3$, para n arbitrario se puede definir el espacio tangente a S en $\overline{x}_0$ como el espacío ortogonal a $\bigtriangledown g(\overline{x}_0)$, en el sentido siguiente:
$\bigtriangledown g(\overline{x}_0)$es ortogonal a$\overline{c}'(0) =$ vector tangente a S en $\overline{x}_0$, $\overline{c}(t) =$ trayectoria en S y $\overline{c}(0) = \overline{x}_0$, es decir $\bigtriangledown g(\overline{x}_0) \cdot c'(0) = 0$.
Por otro lado si $f\ |_S$ tiene un máximo en $\overline{x}_0$ entonces $f(c(t)$ tiene un máximo en $t = 0$ $(f(c(0) = f(\overline{x}_0)))$ lo que implica que:$0 = \dfrac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0} = \bigtriangledown f(c(t)) \cdot c'(t|_{t=0} = \bigtriangledown f(\overline{x}_0) \cdot c'(0) \Rightarrow$ $\bigtriangledown f(\overline{x}_0)$ es perpendicular al espacio tangente e S en $\overline{x}_0$. Como es espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\bigtriangledown f(\overline{x}_0)$ y $\bigtriangledown g(\overline{x}_0)$ son paralelos. Como $\bigtriangledown g(\overline{x}_0) = 0$ entonces $\bigtriangledown f(\overline{x}_0)$ es un multiplo de $\bigtriangledown g(\overline{x}_0)$. $\square$

Corolario 1. *Si el restringir f a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo. en $\overline{x}_0$ entonces. $\bigtriangledown f(\overline{x}_0) \perp$ a S en $\overline{x}_0$.*

Llamaremos a λ multiplicador de Lagrange.
Para encontrar los puntos $\overline{x}_0$ tales que $\bigtriangledown f(\overline{x}_0) = \lambda \bigtriangledown g(\overline{x}_0)$ debemos resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones en $x_1, ..x_n, \lambda$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}),\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x})\\ g(\overline{x}) = c\end{gathered}$$

con $\overline{x} = (x_1, .., x_n)$
o equivalentemente si definimos: $h(x_1, ..x_n, \lambda) = f(x_1, ..x_n) - \lambda[g(x_1, ..x_n) - c]$, resolver :

$$\begin{gathered}\frac{\partial h}{\partial x_1}(\overline{x}, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x})\\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(\overline{x}, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(\overline{x})\\ 0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\overline{x}, \lambda) = g(\overline{x}) - c\end{gathered}$$

Ejemplo 1. *Aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeta a $x + y = 3$.* ***ver figura 1***

Solución 1. *$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ $g(x, y) := x + y = 3$; $S = \{(x, y) : x + y - 3 = 0\}$, luego $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$, $\overline{x} = (x, y)$ $x = y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ Resolviendo el sistema obtenemos que*

$$\lambda = -3,\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{3}{2}$$

por lo que el punto críticos es $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$, esto significa que a las curvas de nivel de $f : 9 - x^2 - y^2 = c$ para c creciente corresponden valores también crecientes de f.

Así el valor máximo de f (o de c) sujeta a la restricción, ocurre donde la curva de nivel $c = \frac{9}{2}$ es tangente a la recta $x + y = 3$.

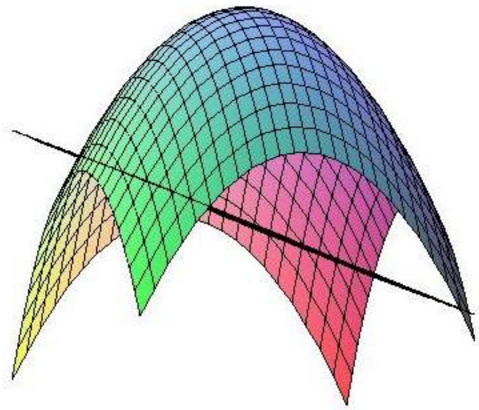

Figura 1: $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ y $x + y = 3$

Ejemplo 2. *Calcular los máximos y mínimos de* $f(x,y) = xy$ *para* (x,y) *restringido a la elipse* $4x^2 + y^2 = 4$. ***ver figura 2***

Solución 2. $f(x,y) = xy$; $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ $S = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 : g(\overline{x}) = 0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = \lambda \bigtriangledown g(\overline{x}) \\ g(\overline{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda 8x \\ x = \lambda 2y \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \textit{Resolviendo el sistema :}$$

Si $x = 0$, *entonces* $y = \pm 2$ *Si* $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, *entonces* $y = \pm\sqrt{2}$ *Así los puntos críticos son :*

$$(0,2), (0,-2), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}), -(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$$

Valores de f *en los puntos críticos:*

$$\begin{gathered} f(0,2) = 0 \\ f(0,-2) = 0 \\ f(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = 1 \leftarrow \textit{Valor máximo} \\ f(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = -1 \leftarrow \textit{Valor mínimo} \\ f(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = -1 \leftarrow \textit{Valor mínimo} \\ f(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = 1 \leftarrow \textit{Valor máximo} \end{gathered}$$

Ejemplo 3. *Determinar los extremos de* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *sujeta a la restricción* $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$

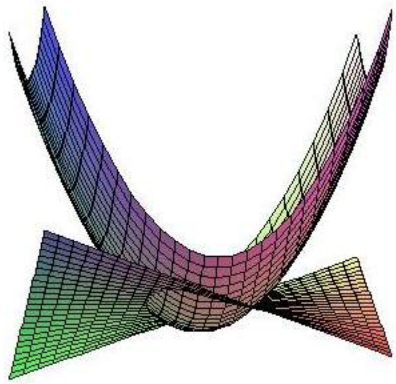

Figura 2: $f(x, y) = xy$ y $4x^2 + y^2 = 4$

Solución 3. $f(\overline{x}) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(\overline{x}) = x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 + \dfrac{1}{9}z^2 - 1$, $S = \{\overline{x} : g(\overline{x}) = 0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = \lambda \bigtriangledown g(\overline{x}) \\ g(\overline{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = \lambda \frac{y}{2} \\ 2x = \lambda 2x \\ 2z = \lambda \frac{2z}{9} \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$ *Resolviendo el sistema, obtenemos:*

$2x - 2\lambda x = 0 \Rightarrow x(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow x = 0$ *o* $\lambda = 1$ *si* $x = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4}y^2 + \dfrac{1}{9}z^2 - 1 = 0.$

si $\lambda = 1 \Rightarrow 2y - \dfrac{1}{2}y = 0 \Rightarrow \dfrac{3}{2}y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{9}z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = \pm 3$

si $\lambda = 1 \Rightarrow 2z - \dfrac{2}{9}z = 0 \Rightarrow \dfrac{16}{9}z = 0 \Rightarrow z = 0$

ahora

$x = 0 = y = z \leftarrow$ *no puede ser.*

$x = z = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 2$

$y = z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

Luego los puntos críticos son:

$(0, 0, \pm 3), (0, \pm 2, 0), (\pm 1, 0, 0)$. *Como la restricción es un elipsoide, superficie acotada entonces entre los puntos críticos tiene que haber un máximo y un mínimo.*

$f(\pm 1, 0, 0) = 1 \leftarrow$*mínimo.*

$f(0, \pm 2, 0) = 4.$

$f(0, 0, \pm 3) = 9 \leftarrow$*máximo.*

Observación 1. *Acerca de la geomtría de este problema:*
La función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *mide el cuadrado de la distancia del punto* (x,y,z) *al origen. La superficie* S *de la restricción es un elipsoide con centro en el origen. Lo que hicimos entonces fue obtener los puntos del elipsoide que estaban más cerca y mas lejos del origen.*

1.1. Varias Restricciones

Si una superficie S está definida por varias restricciones, a saber:

$$\begin{gathered} g_1(x_1,...,x_n) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(x_1,...,x_n) = c_k \end{gathered}$$

entonces el teorema de los multiplicadores de Lagrange se puede generalizar en la siguiente forma:

Si f tiene un máximo o un mínimo sobre S en $\overline{x}_0$, entonces deben existir constantes $\lambda_1,...,\lambda_k$ tales que:

$$\boxed{\bigtriangledown f(\overline{x}_0) = \lambda_1 \bigtriangledown g_1(\overline{x}_0) + ... + \lambda_k \bigtriangledown g_k(\overline{x}_0)}$$

(adicionalmente suponemos que los vectores $\bigtriangledown g_1(\overline{x}_0),...,\bigtriangledown g_k(\overline{x}_0)$ son *l.i.*)

Ejemplo 4. *Hallar los extremos de la función* $f(x,y,z) = xyz$ *sujeta a las restricciones* $g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 = 0$ *y* $g_2(x,y,z) := x+y+z = 0$

Solución 4. *Consideramos el siguiente sistema:*

$$\begin{array}{c} \bigtriangledown f(\overline{x}) = \lambda_1 g_1(\overline{x}) + \lambda_2 g_2(\overline{x}) \\ g_1(\overline{x}) = 0 \\ g_2(\overline{x}) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} yz = \lambda_1 2x + \lambda_2 \\ xz = \lambda_1 2y + \lambda_2 \\ xy = \lambda_1 2z + \lambda_2 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ x+y+z = 0 \end{array} \quad \textit{Donde la solución esta dada por:}$$

si $z = y$ *se sigue que:* $x + 2y = 0$, *entonces* $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = -2\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, *así:* $P_1 = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ *y* $P_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

Por otro lado si $x = -2\lambda_1$, *entonces* $y = x$ *ó* $z = x$, *de donde:*
Si $y = x \Rightarrow z = -2x \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow z = \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ *así* $P_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ *y* $P_4 =$

$\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Si $z=x\Rightarrow y=-2x\Rightarrow 2x^2+4x^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$ *así* $P_5=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
y $P_6=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$

finalmente evaluando en la función $P_1,...,P_6$ *tenemos:*
$f(P_1)=f(P_3)=f(P_5)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}\leftarrow$ *mínimo*
$f(P_2)=f(P_4)=f(P_6)=\frac{1}{3\sqrt{6}}\leftarrow$ *máximo*

1.2. Máximos y Minímos globales

Definición 1. *Sea* U *una región abierta en* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* ∂U*. Decimos que* ∂U *es suave si* ∂U *es el conjunto de nivel de una función suave y cuyo gradiente* $\bigtriangledown g$ *nunca se anula.*

Estrategia usando multiplicadores de Lagrange para encontrar máximos y mínimos absolutos en regiones con frontera.
Sea f una función diferenciable sobre una región cerrada y acotada $D=U\cap\partial U$, U-abierto en $\mathbb{R}^n$ con ∂U suave.
Para hallar el máximo y mínimo absoluto de f en D:

i Encontrar todos los puntos críticos de f en U.

ii Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar todos los puntos críticos de $f\backslash\partial U$.

iii Calcular el valor de f en todos los puntos críticos

iv Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

Ejemplo 5. *Determinar los extremos absolutos de* $f(x,y)=x^2+3y^2$ *en la región* $\mathcal{K}=\{(x,y):x^2-2x+y^2-3\leq 0\}$

Solución 5. *Sea* $\mathcal{K}=\{(x,y):x^2-2x+y^2-3\leq 0\}=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leq 4\}=$ *Disco de centro* $(0,1)$ *y de radio* 2.
Puntos críticos de f *en* $\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}=6y=0$ *luego* $P_1=(0,0)$.
Extremos de f *en* $\partial\mathcal{K}$

$$\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = \lambda \bigtriangledown g(\overline{x}) \\ x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$ *Resolviendo el sistema, obtenemos:*

$P_2 = (-1, 0), P_3 = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}), p_4 = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$, *finalmente evaluando en* $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ *obtenemos:*

$f(P_1) = 0 \leftarrow$ *mínimo absoluto.*

$f(P_1) = 1$

$f(P_3) = f(P_4) = \frac{54}{4} \leftarrow$ *máximo absoluto.*

Por otro lado, cuando consideramos:

$6y = 2\lambda y \Rightarrow 3y - \lambda y = 0 \Rightarrow y(3 - \lambda) = 0 \Rightarrow y = 0$ *o* $\lambda = 3.$

Si $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 4$ *y* $x = -1$ *así* $(-1, 0), (4, 0) \leftarrow \in C$

Si $\lambda = 3 \Rightarrow 2x = 6x - 6 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y^2 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ *así*

$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{-15}}{2}\right)$